

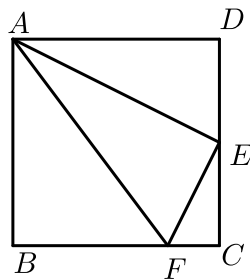
第3讲面积、线段、角度问题

一、面积问题

1. 求三角形面积

典题精练

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， E 是 CD 的中点，点 F 在 BC 上，且 $FC = \frac{1}{4}BC$ 。则 $\triangle AEF$ 的面积是（ ）。



A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

【答案】A

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AB = BC = CD = 4, \angle B = \angle C = \angle D,$$

$\because E$ 是 CD 中点，

$$\therefore DE = CE = \frac{1}{2}CD = 2,$$

$$\because FC = \frac{1}{4}BC,$$

$$\therefore FC = 1,$$

$$\therefore BF = BC - FC = 4 - 1 = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2}AB \cdot BF = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6,$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}AD \cdot DE = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4,$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}CE \cdot CF = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1,$$

$$S_{\text{正方形}ABCD} = 4 \times 4 = 16,$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\triangle ABF} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle CEF}$$

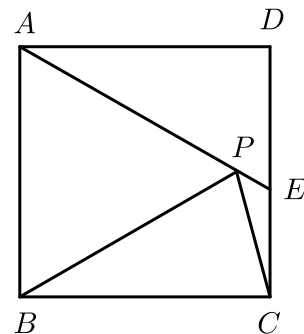
$$= 16 - 6 - 4 - 1$$

= 5 .

故选：A .

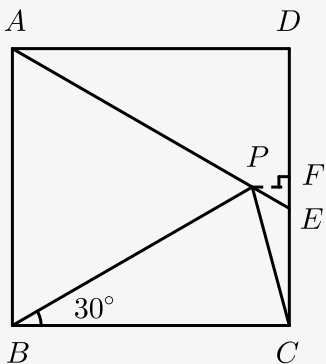
【标注】【知识点】正方形的周长与面积

2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AD = 4\sqrt{3}$ ，把边 BC 绕点 B 逆时针旋转 30° 得到线段 BP ，连接 AP 并延长交 CD 于点 E ，连接 PC ，则三角形 PCE 的面积为 _____ .



【答案】 $36 - 20\sqrt{3}$

【解析】过点 P 作 $PF \perp CD$ 于点 F .



$\because$ 正方形 $ABCD$,
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$,
 $\because$ 把边 BC 绕点 B 逆时针旋转 30° 得到线段 BP ,
 $\therefore BC = BP$, $\angle PBC = 30^\circ$,
 $\therefore \angle ABP = 90^\circ - \angle PBC = 60^\circ$,
又 $\because AB = BP$,
 $\therefore \triangle ABP$ 是等边三角形 ,
 $\therefore \angle BAP = 60^\circ$, $AP = AB = 4\sqrt{3}$,
 $\because AD = 4\sqrt{3}$, $\angle DAE = 30^\circ$.
在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中 ,
 $\tan 30^\circ = \frac{DE}{AD}$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{DE}{4\sqrt{3}},$$

$$DE = 4,$$

$$\therefore AE = 2DE$$

$$= 2 \times 4$$

$$= 8,$$

$$\therefore CE = CD - DE$$

$$= 4\sqrt{3} - 4.$$

在 $\text{Rt}\triangle PEF$ 中,

$$PE = AE - AP = 8 - 4\sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{PF}{PE}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{PF}{8 - 4\sqrt{3}},$$

$$PF = 4\sqrt{3} - 6,$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle PCE} &= \frac{1}{2} \times CE \cdot PF \\ &= \frac{1}{2} \times (4\sqrt{3} - 4) \times (4\sqrt{3} - 6) \\ &= (2\sqrt{3} - 2) \times (4\sqrt{3} - 6) \\ &= 36 - 20\sqrt{3}. \end{aligned}$$

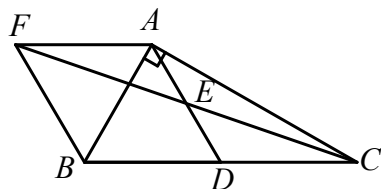
【标注】【知识点】旋转的性质

【知识点】正方形的性质

2. 求四边形面积

典题精练

3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 4$, $AC = 6$, 点 D 、 E 分别是 BC 、 AD 的中点, $AF \parallel BC$ 交 CE 的延长线于 F , 则四边形 $AFBD$ 的面积为 _____.



【答案】12

【解析】 $\because AF \parallel BC$,

$$\therefore \angle AFC = \angle FCD,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DEC$ 中.

$$\begin{cases} \angle AFC = \angle FCD \\ \angle AEF = \angle DEC \\ AE = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DEC \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AF = DC,$$

$$\therefore BD = DC,$$

$$\therefore AF = BD$$

$\therefore$ 四边形 $AFBD$ 是平行四边形,

$$S_{\text{四边形}AFBD} = 2S_{\triangle ABD},$$

$$\text{又} \because BD = DC$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABD},$$

$$S_{\text{四边形}AFBD} = S_{\triangle ABC},$$

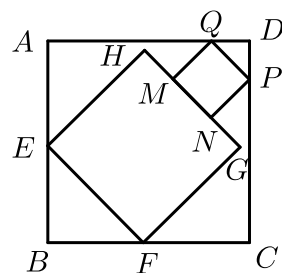
$$\therefore \angle BAC = 90^\circ, AB = 4, AC = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 12,$$

$$S_{\text{四边形}AFBD} = 12.$$

【标注】【知识点】AAS

4. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, 有面积为4的正方形 $EFGH$ 和面积为2的正方形 $PQMN$, 点 E, F, P, Q 分别在边 AB, BC, CD, AD 上, 点 M, N 在边 HG 上, 且组成的图形为轴对称图形, 则正方形 $ABCD$ 的面积为 _____.



【答案】 $\frac{27}{4} + \frac{9}{2}\sqrt{2}$

【解析】 连接 BD , 交 QP 于 I 点, 交 EF 于 K 点,

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 两不相邻的正方形面积为4和2,

$$\therefore PQ = \sqrt{2}, EF = 2,$$

$$\angle QDP = \angle EBF = 90^\circ$$

$$QD = PD, BE = BF,$$

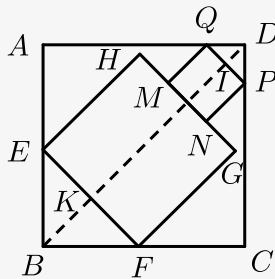
$$\therefore DI = \frac{1}{2}QP = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$BK = \frac{1}{2}EF = 1,$$

$\therefore$

$$AC = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + 2 + 1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 3,$$

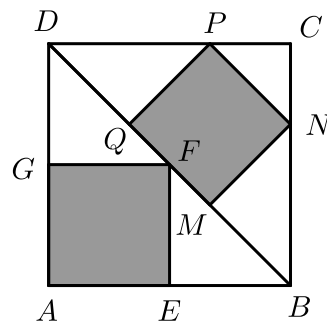
$$\therefore S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 3 \right)^2 = \frac{27}{4} + \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$



【标注】【知识点】正方形的周长与面积

经典再现

5. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E, N, P, G 分别在边 AB, BC, CD, DA 上，点 M, F, Q 都在对角线 BD 上，且四边形 $MNPQ$ 和 $AEFG$ 均为正方形，则 $\frac{S_{\text{正方形}MNPQ}}{S_{\text{正方形}AEFG}}$ 的值等于_____.



【答案】 $\frac{8}{9}$

【解析】在正方形 $ABCD$ 中，

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = 45^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $MNPQ$ 和 $AEFG$ 均为正方形，

$$\therefore \angle BEF = \angle AEF = 90^\circ, \angle BMN = \angle QMN = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle BEF$ 与 $\triangle BMN$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore FE = BE = AE = \frac{1}{2}AB, BM = MN = QM,$$

同理 $DQ = MQ$ ，

$$\therefore MN = \frac{1}{3}BD = \frac{\sqrt{2}}{3}AB,$$

$$\therefore \frac{S_{\text{正方形}MNPQ}}{S_{\text{正方形}ADFG}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}AB\right)^2}{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \frac{8}{9},$$

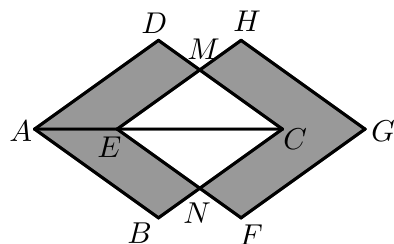
故答案为： $\frac{8}{9}$ 。

【标注】【知识点】正方形的性质

3. 求阴影部分面积

典题精练

6. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 $AC = 3\text{ cm}$ ，把它沿对角线 AC 方向平移 1 cm 得到菱形 $EFGH$ ，则图中阴影部分图形的面积与四边形 $ENCM$ 的面积之比为（ ）。



A. 9 : 4

B. 12 : 5

C. 3 : 1

D. 5 : 2

【答案】D

【解析】 $\because ME \parallel AD$,

$\therefore \triangle MEC \sim \triangle DAC$,

$$\therefore \frac{EC}{AC} = \frac{ME}{AD},$$

$\because$ 菱形 $ABCD$ 的对角线 $AC = 3\text{ cm}$ ，把它沿着对角线 AC 方向平移 1 cm 得到菱形 $EFGH$

,

$\therefore AE = 1\text{ cm}$, $EC = 2\text{ cm}$,

$$\therefore \frac{EC}{AC} = \frac{2}{3},$$

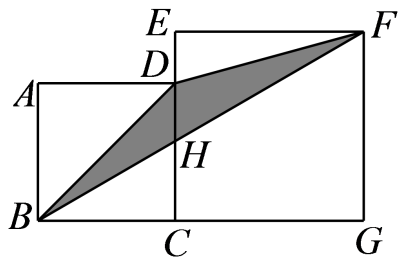
$$\therefore \frac{S_{\triangle CME}}{S_{\triangle DAC}} = \frac{4}{9},$$

$\therefore$ 图中阴影部分图形的面积与四边形 $ENCM$ 的面积之比为：

$$\frac{2 \times (9 - 4 + 9 - 4)}{9 + 9} = \frac{5}{2}.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

7. 如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $ECGF$ 的边长分别为3和4，则阴影部分面积等于_____。

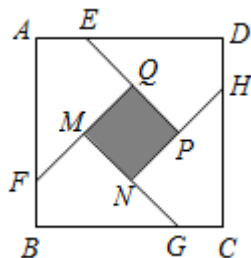


【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】 $S = S_{ABCD} + S_{ECGF} - S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BFG} - S_{\triangle EDF}$,
 $= 9 + 16 - \frac{9}{2} - \frac{7 \times 4}{2} - \frac{4 \times 1}{2}$,
 $= \frac{9}{2}$.

【标注】 【知识点】 正方形的性质

8. 如图，在边长为 a ($a > 2$) 的正方形 $ABCD$ 各边上分别截取 $AE = BF = CG = DH = 1$ ，当 $\angle AFQ = \angle BGM = \angle CHN = \angle DEP = 45^\circ$ 时，则正方形 $MNPQ$ 的面积为_____。



【答案】 2

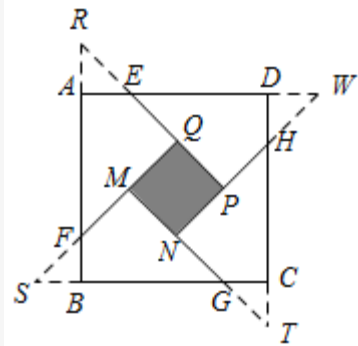
【解析】 如图所示延长 BA 和 PE 交于 R 点，

同理可得 W, T, S 点，

可算得4个等腰直角三角形 $\triangle QRF, \triangle MSG, \triangle NTH, \triangle PWE$ 和为 a^2 ，

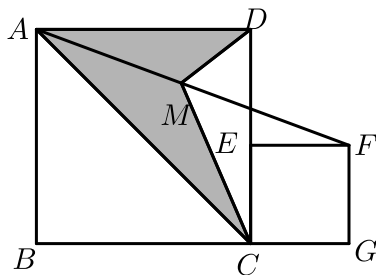
而正方形 $ABCD$ 的面积也是 a^2 ，

$$\therefore S_{MNPQ} = S_{\triangle ARE} + S_{\triangle BFS} + S_{\triangle CGT} + S_{\triangle DHW} = 4S_{\triangle ARE} = 4 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 2$$



【标注】【知识点】正方形的周长与面积

9. 如图，正方形 $ABCD$ 与正方形 $ECGF$ ($CE < AB$) 的边长分别为 a, b ， B, C, G 三点在同一条直线上， CE 在边 CD 上，连接 AF ， M 为 AF 的中点，连接 DM, CM ，若 $ab = 20$ ，则图中阴影部分的面积为 _____（用含 a 的代数式表示）。



【答案】 $\frac{1}{4}a^2 + 5$

【解析】延长 GF, AD ，交于点 H ，连接 CF ，

过 M 作 $MN \perp AD$ ， $MO \perp AC$ ，

$\because AC, CF$ 为两个正方形的对角线，

$\therefore \angle ACD = 45^\circ, \angle ECF = 45^\circ$ ，

又 $\because MO \perp AC$ ， M 为 AF 的中点，

$\therefore OM$ 为 $\triangle ACF$ 的中位线，

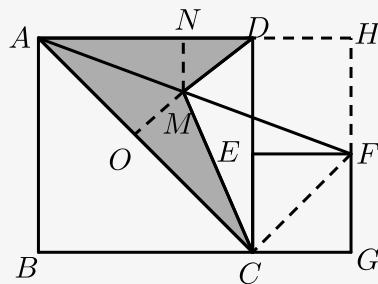
$\therefore OM = \frac{1}{2}CF = \frac{\sqrt{2}}{2}b$ ，

同理可得 MN 为 $\triangle AFH$ 的中位线， $MN = \frac{1}{2}HF = \frac{1}{2}(a - b)$ ，

$\therefore S = S_{\triangle ADM} + S_{\triangle DMC} = \frac{1}{2}AD \cdot MN + \frac{1}{2}AC \cdot MO$ ，

$= \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}(a - b) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}b$ ，整理可得：

$S = \frac{1}{4}a^2 + 5$ 。

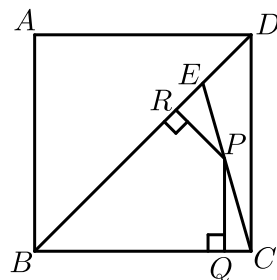


【标注】【知识点】中位线定理及其应用

4. 等面积的应用

典题精练

10. 如图： E 是边长为1的正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点，且 $BE = BC$ ， P 为 CE 上任意一点， $PQ \perp BC$ 于点 Q ， $PR \perp BE$ 于点 R ，则 $PQ + PR$ 的值是（ ）。



- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】连接 BP ，过 C 作 $CM \perp BD$ ，如图所示：

$$\because BC = BE,$$

$$\therefore S_{\triangle BCE} = S_{\triangle BPE} + S_{\triangle BPC}$$

$$= \frac{1}{2}BC \times PQ + \frac{1}{2}BE \times PR = \frac{1}{2}BC \times (PQ + PR) = \frac{1}{2}BE \times CM,$$

$$\therefore PQ + PR = CM,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ, CD = BC = 1, \angle CBD = \angle CDB = 45^\circ,$$

$$\therefore BD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

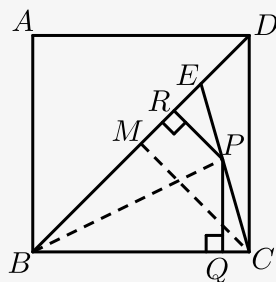
$$\because BC = CD, CM \perp BD,$$

$\therefore M$ 为 BD 中点，

$$\therefore CM = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{即 } PQ + PR \text{ 值是 } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

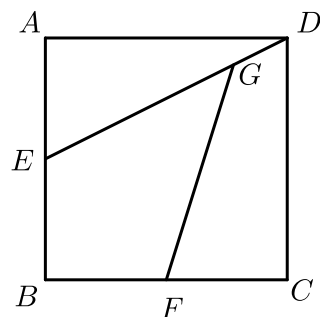
故选：C.



【标注】【知识点】正方形的判定

11.

如图，在正方形 $ABCD$ 中， E, F 分别是 AB, BC 的中点，点 G 是线段 DE 上一点，且 $\angle EGF = 45^\circ$ ，若 $AB = 10$ ，则 $DG = \underline{\quad}$ 。



【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】 如图，连接 EF, DF ，

作 $FM \perp DE$ 于 M ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = BC = CD = AD = 10$ ，

$\therefore AE = EB = BF = FC = 5$ ，

$\therefore ED = \sqrt{AE^2 + AD^2} = 5\sqrt{5}$ ，

$EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = 5\sqrt{2}$ ，

$\therefore S_{\triangle DEF} = 100 - \frac{1}{2} \times 10 \times 5 - \frac{1}{2} \times 10 \times 5 - \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{1}{2} DE \times FM$ ，

$\therefore FM = 3\sqrt{5}$ ，

在 $Rt\triangle EFM$ 中，

$EM = \sqrt{EF^2 - FM^2} = \sqrt{5}$ ，

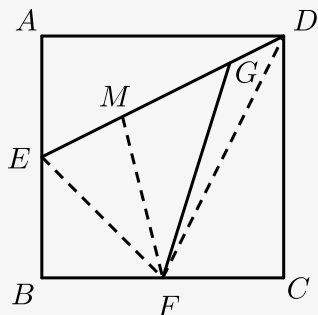
$\therefore DM = DE - EM = 4\sqrt{5}$ ，

$\therefore \angle MGF = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle MGF = \angle MFG = 45^\circ$ ，

$\therefore MG = FM = 3\sqrt{5}$ ，

$\therefore DG = DM - MG = \sqrt{5}$ 。



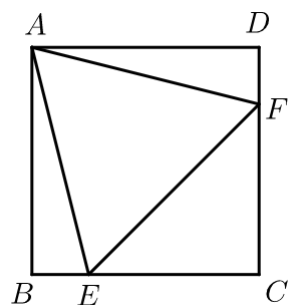
【标注】【知识点】正方形的性质；直接用勾股求边长

二、线段问题

1. 勾股定理及应用

典题精练

12. 在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 两点分别是 BC 、 CD 边上的点，若 $\triangle AEF$ 是边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形，则正方形 $ABCD$ 的边长是（ ）。



A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

C. 2

D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

【答案】A

【解析】 $\because$ 由题意 $AE = AF$ ， $AB = AD$ ， $\angle B = \angle D$ ，

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ABE,$$

$$\therefore BE = DF,$$

$$\therefore EC = FC,$$

由题意知 $\angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle CFE = \angle CEF = 45^\circ,$$

$$\therefore EF = \sqrt{2},$$

$$\therefore EC = FC = 1,$$

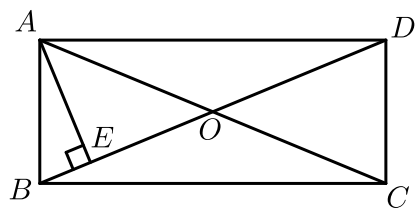
则在直角 $\triangle AFD$ 中得： $AD^2 + (AD - 1)^2 = (\sqrt{2})^2$ ，

$$\text{解得 } AD = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

【标注】【知识点】正方形的性质

13.

如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AE \perp BD$ 于 E ， $\angle BAE : \angle EAD = 1 : 3$ ，且 $AC = 10$ ，则 AE 的长度是（ ）。



A. 3

B. 5

C. $5\sqrt{2}$

D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【答案】 D

【解析】 $\because ABCD$ 为矩形，

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ, OA = OC = \frac{1}{2}AC, AC = BD, OB = OD = \frac{1}{2}BD.$$

$$\because AC = 10,$$

$$\therefore OA = OC = OB = OD = 5.$$

$$\because \angle BAE : \angle EAD = 1 : 3,$$

$$\angle BAE + \angle EAD = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle BAE = 22.5^\circ, \angle EAD = 67.5^\circ.$$

$$\because AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = 67.5^\circ.$$

$$\because \angle ABE + \angle BDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDA = 22.5^\circ,$$

$$\because OA = OD,$$

$$\therefore \angle OAD = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle EAO = 90^\circ - \angle BAE - \angle OAD$$

$$= 90^\circ - 22.5^\circ - 22.5^\circ$$

$$= 45^\circ.$$

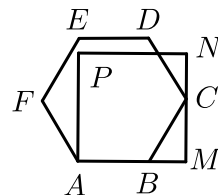
$$\therefore \triangle OAE \text{ 为等腰直角三角形.}$$

$$\because OA = 5,$$

$$\therefore AE = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

【标注】【知识点】矩形的性质

如图，正六边形 $ABCDEF$ 的顶点 B, C 分别在正方形 $AMNP$ 的边 AM, MN 上，若 $AB = 1$ ，则 $CN = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$

【解析】 正六边形内角度数 $\frac{(6 - 2) \times 180}{6} = 120^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle CBM = 60^\circ,$$

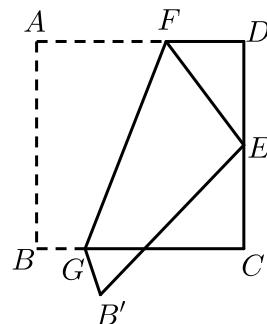
在 $\text{Rt}\triangle CBM$ 中，

$$BC = AB = 1, BM = \frac{1}{2}, CM = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\begin{aligned} \therefore CN &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

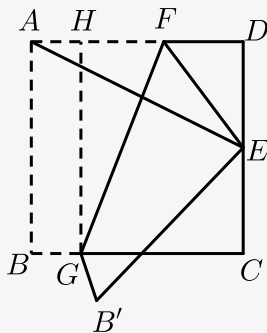
【标注】【知识点】求正多边形的内角

15. 如图，将边长为4的正方形纸片 $ABCD$ 折叠，使得点 A 落在边 CD 的中点 E 处，折痕为 FG ，点 F, G 分别在边 AD, BC 上，则折痕 FG 的长度为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】 如图，过点 G 作 $GH \perp AD$ 于 H ，



则四边形 $ABGH$ 中, $HG = AB$,

由翻转变换的性质得 $GF \perp AE$,

$\therefore \angle AFG + \angle DAE = 90^\circ$, $\angle AED + \angle DAE = 90^\circ$,

$\therefore \angle AFG = \angle AED$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AD = AB$,

$\therefore HG = AD$,

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle GHF$ 中,

$$\begin{cases} \angle GHF = \angle D \\ \angle AFG = \angle AED, \\ GH = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle GHF (AAS)$,

$\therefore GF = AE$,

$\therefore$ 点 E 是 CD 的中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}CD = 2,$$

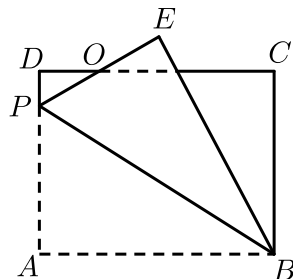
在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 由勾股定理得, $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$,

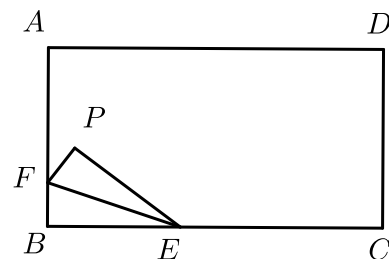
$\therefore GF$ 的长为 $2\sqrt{5}$,

故答案为: $2\sqrt{5}$.

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

16. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 3$, P 为 AD 上一点, 将 $\triangle ABP$ 沿 BP 翻折至 $\triangle EBP$, PE 与 CD 相交于点 O , 且 $OE = OD$, 则 AP 的长为 _____.

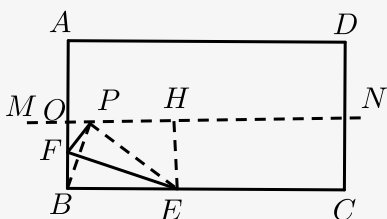




【答案】 $2\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{15}$ 或 $4\sqrt{5}$

【解析】 分三种情况讨论：

①当点 P 正好落在 AB 、 CD 边垂直平分线， F 在线段 AB 上，



过 E 作 $EH \perp OH$ ，连接 BP ，

$\because AB = 8$ ， MN 垂直平分 AB 、 CD ，

$\therefore EH = 4 = OB$ ，

$\because BE = 5$ ， $\triangle BEF$ 沿着 EF 折叠，

$\therefore PE = BE = 5$ ，

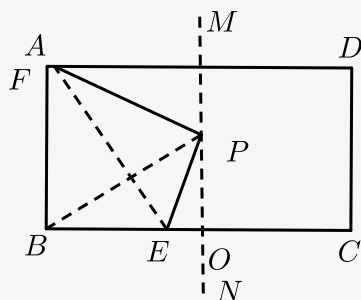
$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle EHP$ 中， $PH = \sqrt{PE^2 - HE^2} = 3$ ，

$\therefore OP = OH - PH = 2$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BOP$ 中， $BP = \sqrt{OB^2 + OP^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ 。

②当点 P 正好落在 AD 、 BC 边垂直平分线， F 在线段 AB 上，

连接 BP ，



$\because BE = 5$ ， $\triangle BEF$ 沿着 EF 折叠，

$\therefore PE = BE = 5$ ，

$\because AD = BC = 12$ ， MN 垂直平分 AD 、 BC ，

$$\therefore BO = 6,$$

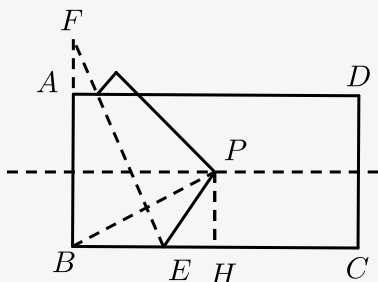
$$\text{又} \because BE = 5,$$

$$\therefore OE = 1,$$

$$\therefore OP = \sqrt{PE^2 - EO^2} = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore \text{在Rt}\triangle POB\text{中}, PB = \sqrt{OP^2 + OB^2} = \sqrt{24 + 36} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}.$$

③当点P正好落在边AB、CD垂直平分线，F在线段BA延长线上时，



连接BP，过P作PH⊥BC，

$$\therefore PH = \frac{1}{2}CD = 4,$$

又 $\because \triangle BEF$ 沿着EF折叠，

$$\therefore EP = BE = 5,$$

$\therefore$ 在Rt△PHE中，

$$EH = \sqrt{PE^2 - PH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore BH = 8,$$

$\therefore$ 在Rt△PHB中，

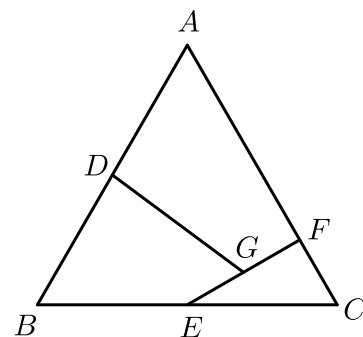
$$PB = \sqrt{PH^2 + BH^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

综上所述，PB的长度为 $2\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{15}$ 或 $4\sqrt{5}$ 。

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

经典再现

18. 如图，在边长为4的等边△ABC中，D，E分别为AB，BC的中点，EF⊥AC于点F，G为EF的中点，连接DG，则DG的长为_____。



【答案】 $\frac{\sqrt{19}}{2}$

【解析】如图，连接 DE ，

$\because D, E$ 分别为 AB, BC 的中点，

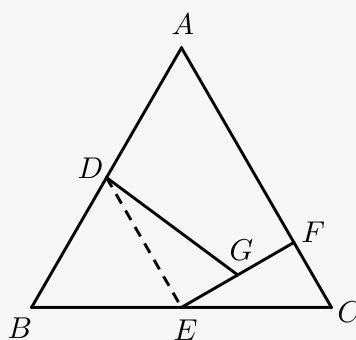
$\therefore DE \parallel AC, DE = \frac{1}{2}AC$ ，

$\therefore DE = 2, EC = 2$ ，

$\angle DEB = \angle C = 60^\circ$ ，

$\because EF \perp AC$ ，

$\therefore \angle FEC = 30^\circ, \angle DEF = 90^\circ$



$\therefore EC = 2$ ，

$\therefore FC = 1, EF = \sqrt{3}$ ，

$\because G$ 为 EF 的中点，

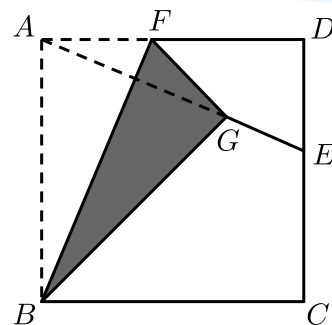
$\therefore EG = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\because DE = 2, \angle DEG = 90^\circ$ ，

$\therefore DG = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$ 。

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

19. 如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为12， E 是边 CD 上一点，连接 AE ，折叠该纸片，使点 A 落在 AE 上的 G 点，并使折痕经过点 B ，得到折痕 BF ，点 F 在 AD 上，若 $DE = 5$ ，则 GE 的长为 _____。



【答案】 $\frac{49}{13}$

【解析】 设 BF 与 AG 交于点 H ,

由折叠性质可知 ,

$AG \perp BF$,

$\therefore \angle AHF = 90^\circ$,

$\therefore \angle AFH + \angle FAH = 90^\circ$,

又 $\because \angle DEA + \angle FAH = 90^\circ$,

$\therefore \angle AFH = \angle DEA$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

$\therefore AB = CD$,

$\angle BAF = \angle ADE = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AFB \cong \triangle DEA$ (AAS) ,

$\therefore DE = 5$,

$\therefore AF = DE = 5$,

$\therefore BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$,

$\therefore \angle AHF = \angle FAB = 90^\circ$,

$\angle AFH = \angle AFB$,

$\therefore \triangle AFH \sim \triangle BFA$,

$\therefore \frac{AH}{BA} = \frac{AF}{BF}$,

即 $\frac{AH}{12} = \frac{5}{13}$,

$\therefore AH = \frac{60}{13}$,

$\therefore AG = 2AH = 2 \times \frac{60}{13} = \frac{120}{13}$,

$\therefore AD = 12$,

$DE = 5$,

$\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$,

$\therefore GE = AE - AG = 13 - \frac{120}{13} = \frac{49}{13}$.

【标注】【知识点】正方形的性质

【知识点】相似三角形的性质

【知识点】翻折问题与勾股定理

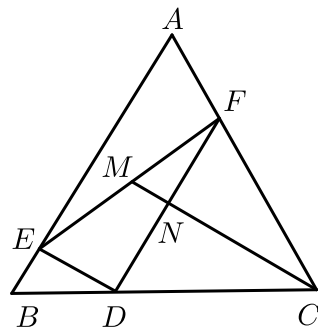
【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

2. 斜边中线

典题精练

20. 如图，在边长为2的等边三角形 ABC 中， D 为边 BC 上一点，且 $BD = \frac{1}{2}CD$ 。点 E, F 分别在边 AB, AC 上，且 $\angle EDF = 90^\circ$ ， M 为边 EF 的中点，连接 CM 交 DF 于点 N 。若 $DF \parallel AB$ ，则 CM 的长为（ ）。



A. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

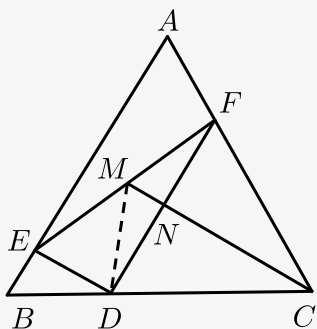
B. $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

C. $\frac{5}{6}\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】



连接 DM ，

$\because$ 等边三角形边长为2且 $BD = \frac{1}{2}DC$ ，

$\therefore BD = \frac{2}{3}$ ， $CD = \frac{4}{3}$ ，

$\because DF \parallel AB$ ， $\angle EDF = 90^\circ$ ，

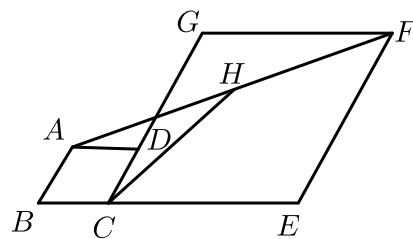
$\therefore \angle BED = 90^\circ$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore BE = BD \cos B = \frac{1}{3}, \\
&DE = BD \sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\
&\therefore \text{在 Rt}\triangle DEF \text{ 中, } M \text{ 为 } EF \text{ 中点,} \\
&\therefore DM = EM = FM = \frac{1}{2}EF, \\
&\therefore DF \parallel AB, \\
&\therefore \triangle CDF \text{ 为等边三角形,} \\
&\therefore CD = CF = DF = \frac{4}{3}, \\
&\therefore CM \text{ 垂直平分 } DF, \\
&\therefore EF = \sqrt{DE^2 + DF^2} = \frac{\sqrt{19}}{3}, \\
&\therefore DM = FM = \frac{\sqrt{19}}{6}, \\
&\therefore CN = CD \sin 60^\circ = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \\
&DN = CD \cos 60^\circ = \frac{2}{3}, \\
&\therefore MN = \sqrt{DM^2 - DN^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \\
&\therefore CM = CN + MN = \frac{5}{6}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

故选C.

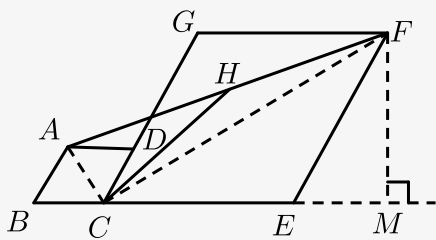
【标注】【知识点】勾股定理的综合应用

21. 如图, 菱形 $ABCD$ 和菱形 $CEFG$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, 点 B, C, E 在同一条直线上, 点 D 在 CG 上, $BC = 1, CE = 3, H$ 是 AF 的中点, 则 CH 的长为 _____.



【答案】 $\sqrt{7}$

【解析】如图, 连接 AC, CF , 作 $FM \perp CE$, 垂足为 M ,



$$\begin{aligned}
 &\because \text{四边形 } ABCD \text{ 和 } CEFH \text{ 均为菱形}, \\
 &\therefore BA = BC, FE = CE, \angle FCE = \frac{1}{2} \angle GCE, FE \parallel GC, \\
 &\therefore \triangle ABC = \angle GCE = 60^\circ, \\
 &\therefore \triangle ABC \text{ 为等边三角形}, \angle FCE = 30^\circ, \angle FEM = 60^\circ, \\
 &\therefore \angle ACB = 60^\circ, AC = BC = 1, \\
 &\therefore \angle ACF = 180^\circ - \angle ACB - \angle FCE = 90^\circ, \\
 &\therefore H \text{ 为 } AF \text{ 的中点}, \\
 &\therefore CH = \frac{1}{2} AF, \\
 &\text{又} \because \angle FME = 90^\circ, \\
 &\therefore \angle EFM = 30^\circ, \\
 &\therefore EM = \frac{1}{2} FE, \\
 &\therefore FE = CE = 3, \\
 &\therefore EM = \frac{3}{2}, \\
 &\therefore FM = \sqrt{FE^2 - EM^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, CM = CE + EM = \frac{9}{2}, \\
 &\therefore CF = \sqrt{CM^2 + FM^2} = \frac{6\sqrt{3}}{2}, \\
 &\therefore AF = \sqrt{AC^2 + FC^2} = 2\sqrt{7}, \\
 &\therefore CH = \frac{1}{2} AF = \sqrt{7}.
 \end{aligned}$$

【标注】【能力】抽象概括能力

【知识点】菱形的性质

【知识点】勾股定理与实际应用

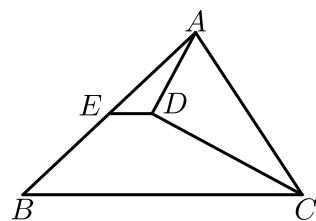
【知识点】等边三角形的性质

【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

3. 中位线定理

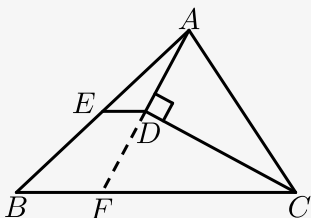
典题精练

22. 如右图，在 $\triangle ABC$ 中，从 A 点向 $\angle ACB$ 的角平分线作垂线垂足为 D ， E 是 AB 的中点，若 $AC = 4$ ， $BC = 6$ ，则 DE 的长是 _____ 。



【答案】 1

【解析】 延长 AD 交 BC 于点 F ，



$$\therefore AD \perp CD,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle CDF = 90^\circ.$$

又 $\because CD$ 平分 $\angle ACB$ ，

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle BCD,$$

$$\therefore FC = AC = 4,$$

$$\therefore BF = 2.$$

又 $\because E$ 是 AB 的中点， D 是 AF 的中点，

$$\therefore DE \parallel BF,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABF,$$

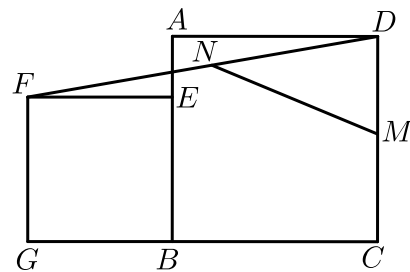
$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BF = 2,$$

$$\therefore DE = 1.$$

【标注】【知识点】相似A字型

23. 如图，已知点 E 在正方形 $ABCD$ 的边 AB 上，以 BE 为边向正方形 $ABCD$ 外部作正方形 $BEFG$ ，连接 DF ， M 、 N 分别是 DC 、 DF 的中点，连接 MN 。若 $AB = 7$ ， $BE = 5$ ，则 $MN =$ _____ 。



【答案】 $\frac{13}{2}$

【解析】 $\because$ 正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$ 中, $AB = 7$, $BE = 5$,

$$\therefore GF = GB = 5, BC = 7,$$

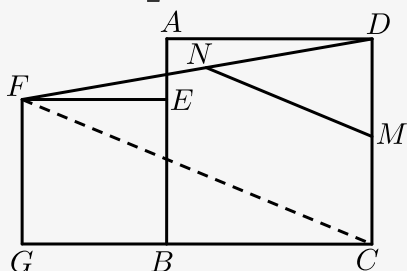
$$\therefore GC = GB + BC = 5 + 7 = 12,$$

$$\therefore CF = \sqrt{GF^2 + GC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

$\because$ M 、 N 分别是 DC 、 DF 的中点,

$$\therefore MN = \frac{1}{2}CF = \frac{13}{2},$$

故答案为: $\frac{13}{2}$.



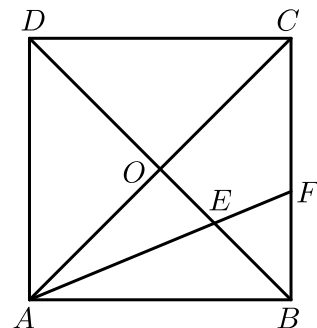
【标注】【知识点】直接用勾股求边长

【知识点】勾股定理

【知识点】正方形的性质

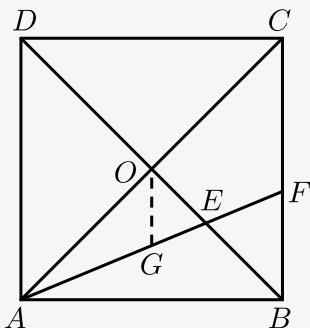
【能力】推理论证能力

24. 如图, 正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $\angle CAB$ 的平分线交 BD 于点 E , 交 BC 于点 F . 若 $OE = 2$, 则 $CF =$ _____.



【答案】4

【解析】如图，



取 AF 的中点 G ，连接 OG ，

$\because O、G$ 分别为 $AC、AF$ 的中点，

$\therefore OG = \frac{1}{2}CF$ 且 $OG \parallel CF$ ，

$\because \angle CAB = 45^\circ$ ， AF 平分 $\angle CAB$ ，

$\therefore \angle BAF = \angle OAF = 22.5^\circ$ ，

$\because \angle AOE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AEO = 90^\circ - \angle OAF = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ$ ，

$\because OG \parallel CF$ ，

$\therefore \angle AOG = \angle OCB = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle OGE = \angle OAF + \angle AOG = 22.5^\circ + 45^\circ = 67.5^\circ$ ，

$\therefore \angle AEO = \angle OGE$ ，

$\therefore OG = OE = 2$ ，

$\therefore CF = 2OG = 4$ 。

【标注】【知识点】正方形的性质

【知识点】中位线定理及其应用

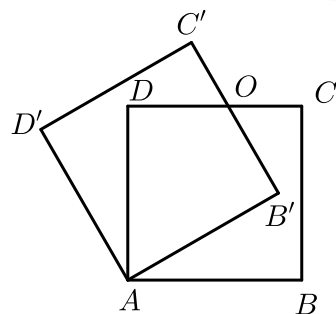
【知识点】角分线性性质定理

【能力】推理论证能力

4. 构造全等

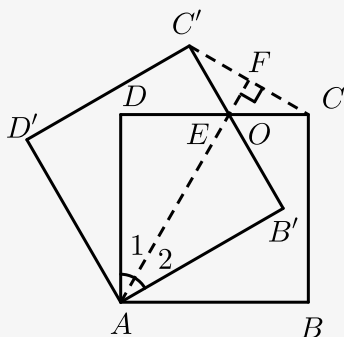
典题精练

25. 如图，将正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转 30° 得到 $AB'C'D'$ ，如果 $AB = 1$ ，点 C 与 C' 的距离为_____。



【答案】 $\sqrt{3} - 1$

【解析】 连接 AE ，如图所示，



在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 与 $\text{Rt}\triangle AB'E$ 中，

$$\begin{cases} AD = AB' \\ AE = AE \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle AB'E \text{ (HL)} .$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 30^\circ .$$

$$\therefore AB = 1 ,$$

$$\therefore AB' = 1 .$$

设 $B'E = x$ ，则 $AE = 2x$.

$$\therefore (2x)^2 - x^2 = 1 ,$$

$$\therefore x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} , x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (舍)} .$$

$$\therefore B'E = DE = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

$$\therefore CE = C'E = CD - DE = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

连接 CC' ，作 $EF \perp CC'$ 于点 F .

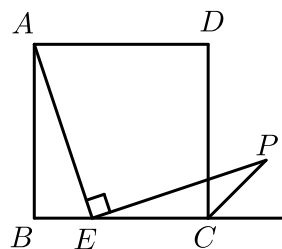
$$\therefore \angle CEC' = \angle DEB' = 120^\circ , C'E = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} , CE = C'E ,$$

$$\therefore EF = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} , CF = \frac{3\sqrt{3} - 3}{6} .$$

$$\therefore CC' = \sqrt{3} - 1 .$$

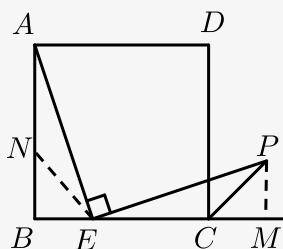
【标注】 【知识点】 正方形与全等综合

26. 如图，在边长为3的正方形 $ABCD$ 中，点 E 是 BC 边上的点， $EC = 2$ ， $\angle AEP = 90^\circ$ ，且 EP 交正方形外角的平分线 CP 于点 P ，则 PC 的长为 _____ 。



【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 在 AB 上取 $BN = BE$ ，连接 EN ，作 $PM \perp BC$ 于 M 。

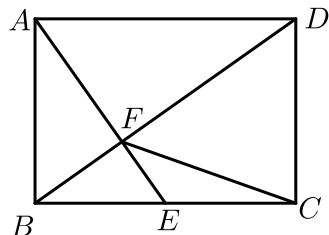


$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
 $\therefore AB = BC$ ， $\angle B = \angle DCB = \angle DC = 90^\circ$ ，
 $\because BE = BN$ ， $\angle B = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle BNE = 45^\circ$ ， $\angle ANE = 135^\circ$ ，
 $\because PC$ 平分 $\angle DCM$ ，
 $\therefore \angle PCM = 45^\circ$ ， $\angle ECP = 135^\circ$ ，
 $\because AB = BC$ ， $BN = BE$ ，
 $\therefore AN = EC$ ，
 $\because \angle AEP = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle AEB + \angle PEC = 90^\circ$ ，
 $\because \angle AEB + \angle NAE = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle NAE = \angle PEC$ ，
 $\therefore \triangle ANE \cong \triangle ECP (\text{ASA})$ ，
 $\therefore AE = PE$ ，
 $\because \angle B = \angle PME = 90^\circ$ ， $\angle BAE = \angle PEM$ ，
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle EMP (\text{AAS})$ ，
 $\therefore BE = PM = 1$ ，
 $\therefore PC = \sqrt{2}PM = \sqrt{2}$ ，

故答案为 $\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

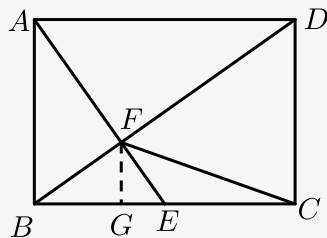
27. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{2}$, E 是 BC 的中点, $AE \perp BD$ 于点 F , 则 CF 的长是 _____ .



【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】方法一: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore$



$$\angle ABE = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\because AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle AFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF + \angle ABD = \angle ABD + \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ADB,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ADB,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{BE},$$

$$\because E \text{ 是 } BC \text{ 的中点},$$

$$\therefore AD = 2BE,$$

$$\therefore 2BE^2 = AB^2 = 2,$$

$$\therefore BE = 1,$$

$$\therefore BC = 2,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{3},$$

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{6},$$

$$\therefore BF = \frac{AB \cdot BE}{AE} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

过 F 作 $FG \perp BC$ 于 G ,

$$\therefore FG \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle BFG \sim \triangle BDC,$$

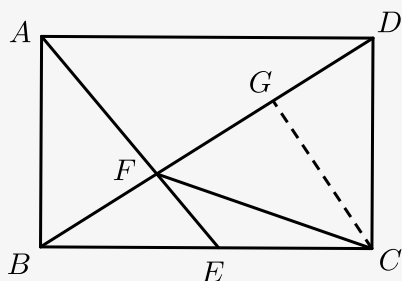
$$\therefore \frac{FG}{CD} = \frac{BF}{BD} = \frac{BG}{BC},$$

$$\therefore FG = \frac{\sqrt{2}}{3}, BG = \frac{2}{3},$$

$$\therefore CG = \frac{4}{3},$$

$$\therefore CF = \sqrt{FG^2 + CG^2} = \sqrt{2}.$$

方法二：如图，过点C作 $CG \perp BD$ ，



$$\therefore AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle CGD = 90^\circ, EF \parallel CG,$$

$\therefore$ 点E是BC中点，

$$\therefore BF = FG,$$

$\therefore$ 四边形ABCD是矩形，

$$\therefore AB = CD = \sqrt{2}, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle CDG,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDG,$$

$$\therefore DG = BF = FG,$$

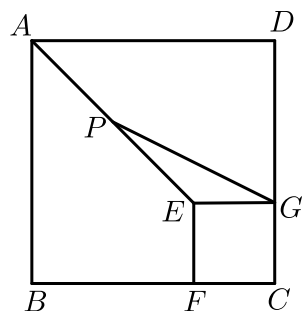
$$\therefore CF = CD = \sqrt{2}.$$

故答案为： $\sqrt{2}$ 。

【标注】【知识点】矩形的性质

经典再现

28. 如图，正方形ABCD和正方形EFCG的边长分别为3和1，点F、G分别在边BC、CD上，P为AE的中点，连接PG，则PG的长为_____。



【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】 方法一：作 $PM \perp CD$ 于点 M ，连接 DE 交 PM 于点 N 。

在正方形 $ABCD$ 中， $\angle ADC = 90^\circ$ ，

$\therefore AD \parallel PM$ 。

$\because P$ 是 AE 中点，

$\therefore PN = \frac{1}{2}AD$ ， $DN = EN$ 。

$\therefore NM = \frac{1}{2}EG$ ， $DM = MG$ 。

$\therefore$

$$PM = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times 1 = 2，$$

$$MG = \frac{1}{2}DG = \frac{1}{2}(CD - CG) = \frac{1}{2} \times (3 - 1) = 1。$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle PMG$ 中， $PM^2 + MG^2 = PG^2$ ，

$$\therefore PG = \sqrt{PM^2 + MG^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}。$$

方法二：延长 GP 、 DA 相交于点 M 。

可证 $\triangle AMP \cong \triangle EGP$ (ASA)。

$\therefore MG = 2PG$ ， $AM = EG = 1$ 。

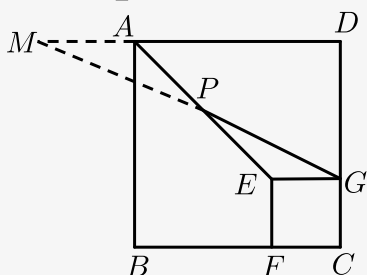
$$DM = AD + AM = 4。$$

$$DG = DC - GC = 2。$$

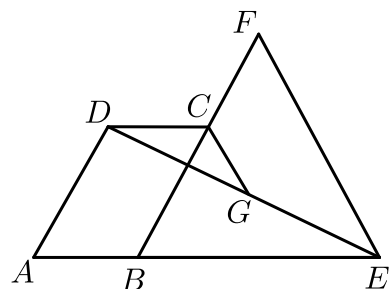
在 $\text{Rt}\triangle DMG$ 中，

$$MG = \sqrt{DM^2 + DG^2} = 2\sqrt{5}。$$

$$\therefore PG = \frac{1}{2}MG = \sqrt{5}。$$

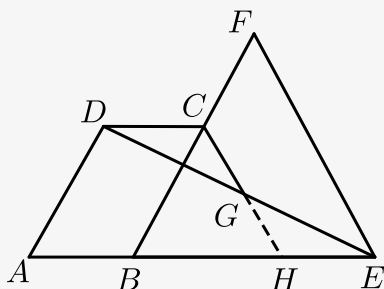


29. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的顶点 C 在等边 $\triangle BEF$ 的边 BF 上，点 E 在 AB 的延长线上， G 为 DE 的中点，连接 CG 。若 $AD = 3$ ， $AB = CF = 2$ ，则 CG 的长为 _____。



【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】延长 CG 交 AE 于 H ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
 $\therefore AD = BC = 3$ ， $AB = CD = 2$ ， $AB \parallel CD$ ，
 $\therefore \angle CDG = \angle HEG$ ．
 $\because G$ 是 DE 的中点，
 $\therefore DG = EG$ ．
 在 $\triangle DCG$ 和 $\triangle EHG$ 中，

$$\begin{cases} \angle CDG = \angle HEG \\ DG = EG \\ \angle DGC = \angle EGH \end{cases}$$
，
 $\therefore \triangle DCG \cong \triangle EHG$ (ASA)，
 $\therefore CG = HG$ ， $DC = EH = 2$ ．
 $\because BC = 3$ ， $CF = 2$ ，
 $\therefore BF = BC + CF = 5$ ．
 $\because \triangle BEF$ 是等边三角形，
 $\therefore \angle EBF = 60^\circ$ ， $BE = BF = 5$ ，
 $\therefore BH = BE - HE = 3$ ，

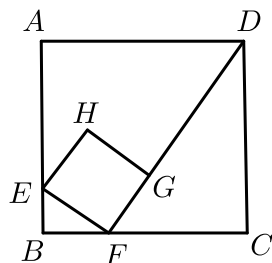
$$\begin{aligned}
 \therefore BH &= BC = 3, \\
 \therefore \triangle BCH &\text{为等边三角形}, \\
 \therefore CH &= BH = BC = 3. \\
 \therefore CG + GH &= CH = 3, \\
 \therefore CG &= GH = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】平行四边形与全等综合

5. 与相似结合

典题精练

30. 如图，在面积为24的正方形 $ABCD$ 中，有一个小正方形 $EFGH$ ，其中 E 、 F 、 G 分别在 AB 、 BC 、 FD 上。若 $BF = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，则小正方形的周长为（ ）。



- A. $\frac{5\sqrt{6}}{8}$ B. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

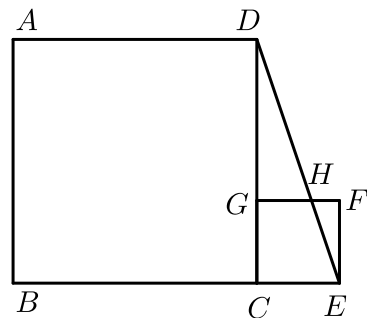
【答案】C

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，面积为24，
 $\therefore BC = CD = 2\sqrt{6}$ ， $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ，
 $\because$ 四边形 $EFGH$ 是正方形，
 $\therefore \angle EFG = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle EFB + \angle DFC = 90^\circ$ ， $\angle BEF + \angle EFB = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle BEF = \angle DFC$ ，
 $\therefore \angle EBF = \angle C = 90^\circ$ ，
 $\therefore \triangle BEF \sim \triangle CFD$ ，
 $\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{BF}{DC}$ ，
 $\therefore BF = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $CF = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ ， $DF = \sqrt{CD^2 + CF^2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ ，

$$\begin{aligned}\therefore \frac{EF}{\frac{5\sqrt{6}}{2}} &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{2\sqrt{6}}, \\ \therefore EF &= \frac{5\sqrt{6}}{8}, \\ \therefore \text{正方形 } EFGH \text{ 的周长为 } &\frac{5\sqrt{6}}{2}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】一线三等角相似

31. 如图，在正方形 $ABCD$ 和正方形 $GCEF$ 中，顶点 G 在边 CD 上，连接 DE 交 GF 于点 H ，若 $FH = 1$ ， $GH = 2$ ，则 DE 的长为 _____。



【答案】 $3\sqrt{10}$

【解析】 $\because ABCD$ 、 $GCEF$ 为正方形，
 $\therefore \angle DCE = \angle FEC = 90^\circ$ ， $CG = EF = GF = CE$ ，
 $\therefore DC \parallel EF$ ，
 $\because FH = 1$ ， $GH = 2$ ，
 $\therefore EF = CG = GF = CE = 1 + 2 = 3$ ，
 $\because EF \parallel CD$ ，
 $\therefore \frac{EF}{DG} = \frac{HF}{GH}$ ，
 即 $\frac{3}{DG} = \frac{1}{2}$ ，则 $DG = 6$ ，
 $\therefore CD = CG + DG = 9$ ，
 $\therefore DE = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$ 。

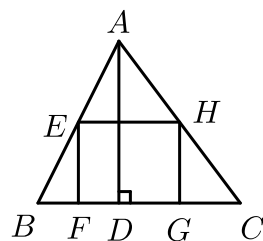
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】正方形的性质

【知识点】平行线的性质

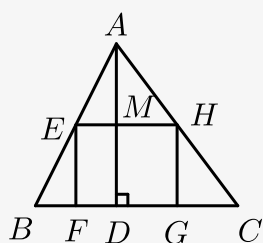
【思想】数形结合思想

32. 如图，矩形 $EFGH$ 内接于 $\triangle ABC$ ，且边 FG 落在 BC 上．若 $BC = 3$ ， $AD = 2$ ， $EF = \frac{2}{3}EH$ ，那么 EH 的长为 _____．



【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】如图，设 AD 与 EH 的交点为 M ，



$\because$ 四边形 $EFGH$ 是矩形，

$\therefore EH \parallel BC$ ，

$$\therefore \frac{AM}{AD} = \frac{AH}{AC} = \frac{EH}{BC}，$$

$\because AD \perp BC$ ，

$\therefore MD = EF$ ，

设 $EH = 3x$ ，则 $EF = 2x$ ， $AM = AD - EF = 2 - 2x$ ，

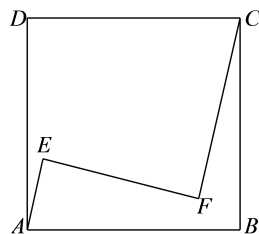
$$\therefore \frac{2 - 2x}{2} = \frac{3x}{3}，$$

解得： $x = \frac{1}{2}$ ，

则 $EH = \frac{3}{2}$ ．

【标注】【知识点】三角形内接四边形问题

33. 如图，正方形 $ABCD$ 内有两点 E 、 F 满足 $AE = 1$ ， $EF = FC = 3$ ， $AE \perp EF$ ， $CF \perp EF$ ，则正方形 $ABCD$ 的边长为 _____ cm^2 ．



【答案】 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【解析】 连接 AC 交 EF 于点 M ,

$$\because AE \perp EF, CF \perp EF,$$

$$\therefore \angle E = \angle F = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AME = \angle CMF,$$

$$\therefore \triangle AEM \sim \triangle CFM,$$

$$\therefore \frac{AE}{CF} = \frac{EM}{FM},$$

$$\because AE = 1, EF = FC = 3,$$

$$\therefore \frac{EM}{FM} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore EM = \frac{3}{4}, FM = \frac{9}{4},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEM \text{ 中, } AM^2 = AE^2 + EM^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16},$$

$$\text{解得: } AM = \frac{5}{4},$$

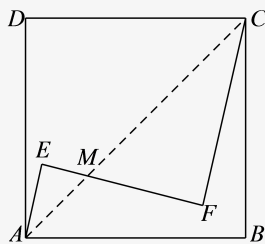
$$\text{在 Rt}\triangle FCM \text{ 中, } CM^2 = CF^2 + FM^2 = 9 + \frac{81}{16} = \frac{225}{16},$$

$$\text{解得: } CM = \frac{15}{4},$$

$$\therefore AC = AM + CM = 5,$$

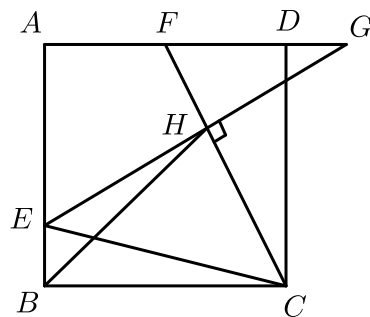
$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AB = BC, AB^2 + BC^2 = AC^2 = 25,$$

$$\therefore AB = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \text{ 正方形的边长为: } \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$



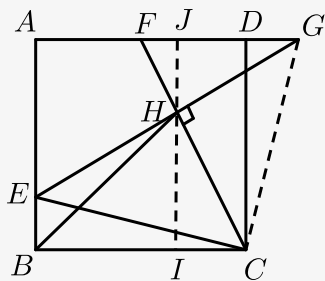
【标注】 【知识点】 解直角三角形的综合应用；相似三角形的性质与判定综合

34. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 6， E 是边 AB 边一点， G 是 AD 延长线上一点， $BE = DG$ ，连接 EG ， $CF \perp EG$ 交 EG 于点 H ，交 AD 于点 F ，连接 CE ， BH ，若 $BH = 4\sqrt{2}$ ，则 EG 的长等于 _____ .



【答案】 $4\sqrt{5}$

【解析】



连接 CG ，过点 H 作 $HI \perp BC$ 于点 I ，延长 IH 交 AD 于点 J ，

在 $\triangle EBC$ 与 $\triangle GDC$ 中，

$$\begin{cases} BE = DG \\ \angle EBC = \angle GDC, \\ BC = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EBC \cong \triangle GDC,$$

$$\therefore EC = CG, \angle ECB = \angle GCD,$$

$$\therefore \angle ECB + \angle ECD = \angle GCD + \angle ECD,$$

$$\therefore \angle ECG = 90^\circ,$$

$$\therefore CF \perp EG,$$

$\therefore H$ 是 EG 的中点，

$$\therefore JH \parallel AE,$$

$$\therefore \triangle JGH \sim \triangle AGE,$$

$$\therefore \frac{JH}{AE} = \frac{HG}{EG} = \frac{JG}{AG},$$

设 $BE = x$ ，

$$\therefore AE = 6 - x,$$

$$\therefore \frac{JH}{6 - x} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore JH = \frac{1}{2}(6 - x) = 3 - \frac{x}{2},$$

$$\therefore HI = JI - JH = 6 - (3 - \frac{x}{2}) = 3 + \frac{x}{2},$$

$$\therefore AG = AD + DG = 6 + x,$$

$$\therefore AJ = BI = \frac{1}{2}AG = 3 + \frac{x}{2},$$

由勾股定理可得：

$$BI^2 + HI^2 = BH^2,$$

解得： $x = 2$ ，

$$\therefore JH = 2, JG = 4,$$

$$\therefore HG = \sqrt{JH^2 + JG^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

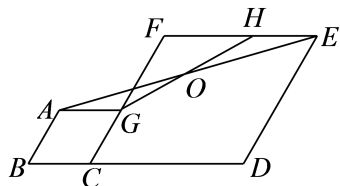
$$\therefore EG = 2HG = 4\sqrt{5}.$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

三、角度问题

典题精练

35. 如图，已知菱形 $ABCG$ 和菱形 $CDEF$ ， B, C, D 在一条直线上，点 G 在 CF 上， $\angle B = 60^\circ$ ， O 为 AE 的中点，连接 GO 并延长交 EF 于点 H ，则 $\angle FHO$ 的度数等于 _____ 。



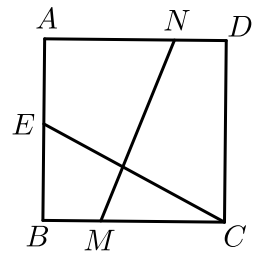
【答案】 30°

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCG$ ，四边形 $CDEF$ 菱形，
 $\therefore \angle B = \angle FCD$ ， $\angle FCD + \angle F = 180^\circ$ ，
 $\angle B = 60^\circ$ ， $AG \parallel EF$
 $\therefore \angle F = 120^\circ$.
 $\because$ 点 O 为 AE 中点， $AO = OE$ ，
 $AG \parallel HE$ ，
 $\therefore \angle OAG = \angle OEH$ ，
 在 $\triangle AOG$ 和 $\triangle COH$ 中，

$$\begin{cases} \angle OAG = \angle OEH \\ \angle AOG = \angle EOH \\ AO = OE \end{cases}$$
 $\therefore \triangle AOG \cong \triangle COH$ ，
 $\therefore AG = HE$ ，
 $\therefore FH = FE - HE$ ， $FG = FC - CG$ ，
 $\therefore FH = FG$ ，
 $\therefore \angle FHO = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$.

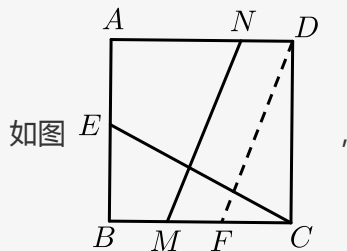
【标注】 【知识点】菱形的性质

36. 如图，正方形 $ABCD$ 中， $CE = MN$ ， $\angle MCE = 35^\circ$ ，则 $\angle ANM$ 的角度为 _____ 。



【答案】 55°

【解析】



作 $DF \parallel MN$ 交 BC 于点 F ,

$\because AD \parallel BC, DF \parallel MN$,

$\therefore$ 四边形 $NMFD$ 为平行四边形.

$\therefore MN = DF, \angle ADF = \angle ANM$,

则 $CE = NM = DF$.

又由正方形可得 $\angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ, BC = CD$,

$\therefore \triangle EBC \cong \triangle FCD (\text{HL})$,

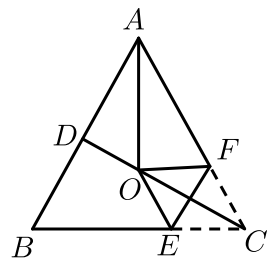
$\therefore \angle CDF = \angle BCE = 35^\circ$,

$\therefore \angle ADF = \angle ADC - \angle CDF = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$,

$\therefore \angle ANM = 55^\circ$.

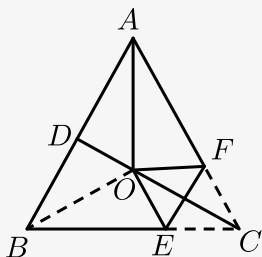
【标注】 【知识点】 角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

37. 如图, 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC, \angle BAC = 58^\circ$, $\angle BAC$ 的平分线与 AB 的垂直平分线交于点 O 、点 C 沿 EF 折叠后与点 O 重合, 则 $\angle OEB$ 的度数是 _____.



【答案】 64°

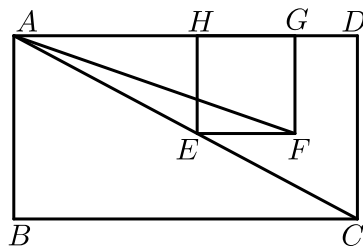
【解析】如图，连接 OB ，



$\because \angle BAC = 68^\circ$ ， AO 为 $\angle BAC$ 的平分线，
 $\therefore \angle BAO = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 58^\circ = 29^\circ$ ，
 又 $\because AB = AC$ ，
 $\therefore \angle ABC = \angle ACB = 61^\circ$ ，
 $\because DO$ 是 AB 的垂直平分线，
 $\therefore OA = OB$ ，
 $\therefore \angle ABO = \angle BAO = 29^\circ$ ，
 $\therefore \angle OBC = \angle ABC - \angle ABO = 61^\circ - 29^\circ = 32^\circ$ ，
 $\because AO$ 为 $\angle BAC$ 的平分线， $AB = AC$ ，
 $\therefore$ 直线 AO 垂直平分 BC ，
 $\therefore OB = OC$ ，
 $\therefore \angle OCB = \angle OBC = 32^\circ$ ，
 $\because$ 将 $\angle C$ 沿 EF （ E 在 BC 上， F 在 AC 上）折叠，点 C 与点 O 恰好重合，
 $\therefore OE = CE$ ，
 $\therefore \angle COE = \angle OCB = 32^\circ$ ，
 $\angle OEB = \angle COE + \angle CEO = 32^\circ + 32^\circ = 64^\circ$ 。

【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

38. 如图，已知点 E 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 上的一个动点，正方形 $EFGH$ 的顶点 G 、 H 都在边 AD 上，若 $AB = 2$ ， $BC = 5$ ，则 $\tan \angle AFE$ 的值（ ）。

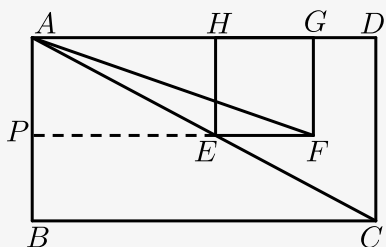


A. 等于 $\frac{2}{5}$
 C. 等于 $\frac{5}{7}$

B. 等于 $\frac{2}{7}$
 D. 不确定，随点 E 位置的变化而变化

【答案】B

【解析】过点E作 $EP \perp AB$ 交AB于点P，



$\therefore EP \perp AB$,

$\therefore \angle APE = 90^\circ$,

又 $\because$ 四边形ABCD是矩形，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle APE = \angle ABC$ 且 $\angle CAP = \angle CAB$,

$\therefore \triangle APE \sim \triangle ABC$,

$\because$ 四边形HEFG是正方形，

$\therefore \angle HEF = 90^\circ$,

又 $\because \angle APE = 90^\circ$,

$\therefore AP \parallel HE$,

又 $\because \angle DAB = 90^\circ$,

$\therefore \angle APE + \angle DAP = 180^\circ$,

$\therefore AH \parallel PE$,

$\therefore$ 四边形APEH是矩形，

设正方形HEFG边长为 a ，

$\therefore HE = a$ ， $AP = HE = a$ ，

$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{PE}{BC}$ ，

$\therefore PE = \frac{AP \cdot BC}{AB} = \frac{5a}{2}$ ，

$\therefore FP = EF + PE = a + \frac{5a}{2} = \frac{7a}{2}$ ，

$\therefore \tan \angle AFE = \frac{AP}{FP} = \frac{a}{\frac{7a}{2}} = \frac{2}{7}$ 。

故选B。

【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用